2021年　東大数学　文系第1問 ①

この問題を考察している間に、別解がたくさん出てきました。
はじめに、私が見つけた解答例の全体像をお見せします。

準備　各図形や方程式に名前をつけます。

曲線 C : $y = f(x) = ax^3 - 2x$　　C 上の点 $P(t, f(t))$ での接線 l : $y = f'(t)(x-t) + f(t)$

法線 n_1 : $y = -\frac{1}{f'(t)}(x-t) + f(t)$

円 D : $x^2 + y^2 = 1$　　D 上の点 $Q(\cos\theta, \sin\theta)$ での接線 m : $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1$

法線 n_2 : $y = (\tan\theta) \cdot x$

緑色の数字が解法の通し番号です

大方針 その1 : C と D の共有点が6個になる条件を考察する。(C と D を連立して、解が6個)

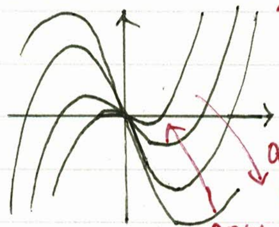
C : $y = f(x) = ax^3 - 2x$ と D : $x^2 + y^2 = 1$ を連立して、

① y を消去して x を残す　一番オススメ
② x を消去して、y を残す　解けるけど、計算激しい。
③ x と y 両方残す　解けない(可能性として出してみただけ)

大方針 その2 : C と D が接するときの a を求め、a を動かす(C の形を変える)ことで範囲を考察する。

補

$y = ax^3 - 2x$ $(a > 0)$ において、a の値が大きくなると、変形する



実際、$y' = 3ax^2 - 2$ より

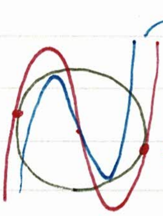
x		$-\sqrt{\frac{2}{3a}}$		$\sqrt{\frac{2}{3a}}$	
y'	+	0	−	0	+
y	↗	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3a}}$	↘	$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3a}}$	↗

となり、極大値は $\left(\sqrt{\frac{2}{3a}}, -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3a}}\right)$ だが、これを考察すると、

$\sqrt{\frac{2}{3a}}$ は a を大きくすると、ドンドン小さくなるので、$(0, 0)$ に近づいていく。

また、極大値の軌跡は、$x = \sqrt{\frac{2}{3a}}$　$y = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3a}}$ からパラメータ a を消去して、$y = -\frac{4}{3}x$ 上にある

よって、円との交点は、



左のような小さい a と大きい a の間の範囲になるだろうと考えて、接するときの a を求めていく。
(実際は、接する a は、$a = 2, \frac{50}{27}$ で、正解は $\frac{50}{27} < a < 2$)

注

大方針その2のような方法は、厳密に共有点が6個となる場合を考えているわけではなく、3次関数の膨らみかたを追っているので、厳密されない記述が難しいかもしれない。

誤方針

「C の極値が外にあればよい。」と考えてはダメ。
再現答案で多く見られました。

確かに極値で接しているように見えるが

実際は極値より少しずれたところで接している。

極値が接するのは、x 軸に平行な直線ダヨー

2021年　東大数学　文系第1問②

大方針その2：接する時のaを求める の下で、色々と解法を挙げていきます。

方針2−1：CとDを連立して、出て来た方程式が重解を持つ。

$C: y=f(x)$ と $D: x^2+y^2=1$ を連立して、

④ yを消去して、xを残す。xの6次方程式が出る。　解ける。

⑤ x : y : 。yの : 　計算が大変で解けない。

⇒ 重解を持つ条件

方針2−2：接線を利用して、アレコレ

	もう片方に接する	2つの接線が一致する	直交条件 (傾き)・(傾き)=−1	直交条件 (内積)=0	法線が原点を通る
C上に、点P$(t, f(t))$をおいて処理	点P$(t, f(t))$が円上にある $t^2+\{f(t)\}^2=1$ (＊) ＋ lが円Dに接する $d=r$ ⑥ or $D=0$ ⑦	$l: y=f'(t)(x-t)+f(t)$ と 点Pでの円の接線 $tx+f(t)y=1$ ⑩ が一致する (＊)も利用	OPの傾き $\frac{f(t)}{t}$ と lの傾き $f'(t)$ を利用し、$\frac{f(t)}{t}\times f'(t)=-1$ ⑫ (＊)も利用	$\overrightarrow{OP}=(t, f(t))$ と lの方向ベクトル $(1, f'(t))$ で $(t, f(t))\cdot(1, f'(t))=0$ (＊)も利用 ⑭	法線n_1 $y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$ が原点を通る $0=-\frac{1}{f'(t)}(0-t)+f(t)$ (＊)も利用 ⑯
D上に、点Q$(\cos\theta, \sin\theta)$をおいて処理	点QがC上に存在 $\sin\theta=f(\cos\theta)$ (＊＊) ＋ mが$y=f(x)$と接する 連立して、重解条件 極値=0 ⑧ or 解と係数の関係 ⑨	m と $y=f'(\cos\theta)(x-\cos\theta)+f(\cos\theta)$ が一致。 (＊＊)も利用 ⑪	OQの傾き $\tan\theta$ と $f'(\cos\theta)$ が直交。 $\tan\theta\cdot f'(\cos\theta)=-1$ (＊＊)も利用 ⑬	$\overrightarrow{OQ}=(\cos\theta, \sin\theta)$ と lの方向ベクトル $(1, f'(\cos\theta))$ が直交 $(\cos\theta, \sin\theta)(1, f'(\cos\theta))=0$ (＊＊)も利用 ⑮	法線n_1 $y=-\frac{1}{f'(\cos\theta)}(x-\cos\theta)+f(\cos\theta)$ が原点を通る。 $0=-\frac{1}{f'(\cos\theta)}(0-\cos\theta)+f(\cos\theta)$ (＊＊)も利用 ⑰

要するに、
接線が他のグラフに接する条件をたくさん出したということです。

法線ベクトルが $\overrightarrow{OP}$ と平行
lの法線ベクトル $(f'(t), -1)$ が $\overrightarrow{OP}=(t, f'(t))$ と平行なので、$(f'(t), -1)=k(t, f(t))$ ⑱ となる実数kが存在する。 (＊)も利用
lの法線ベクトル $(f'(\cos\theta), -1)$ が $\overrightarrow{OQ}=(\cos\theta, \sin\theta)$ と平行なので、$(f'(\cos\theta), -1)=k(\cos\theta, \sin\theta)$ となる実数kが存在。⑲ (＊＊)も利用

全部で19通りの解法がありますが、
ズバリ オススメは①で。
中には計算が激しいものも多いです。

次ページからは、1つずつ解説します。

2021年　東大数学　文系第1問. ③

解法① 連立してyを消去。xが6個解を持つ条件 これが方針

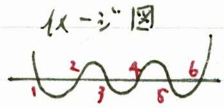
C: $y=f(x)=ax^3-2x$ と
D: $x^2+y^2=1$ を連立して、yを消去する

$$x^2+(ax^3-2x)^2=1$$
$$a^2x^6-4ax^4+5x^2-1=0$$
↓整理

メモ
思いっきりすっけど、6次方程式になって、やや引く。
ふつうは避けたいと思う解法かも。

これが、6個の実数解を持つ。
しかし、6次関数の極値の条件では大変なので、「工夫」する。

イメージ図



$x^2=X$ とおき、3次方程式へ

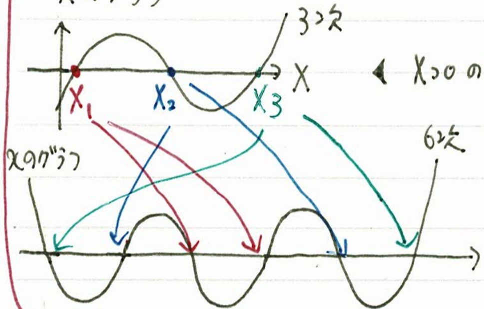
$x^2=X$ とおくと
$$a^2X^3-4aX^2+5X-1=0$$
このXの3次方程式が、$X>0$ の範囲に3解を持てば良い。

3次の解の配置の問題に帰着

$x^2=X>0$ だと、1つのXに対して $x=-\sqrt{X}, \sqrt{X}$ の2解が対応
$x^2=X=0$ だと : $x=0$ の1解が対応
$x^2=X<0$ だと : xの実数解が対応しない。

今回はxの解が6個ほしいので、$X>0$ の解が3つあると
$3\times2=6$ で個数が対応する

Xのグラフ



◀ $X>0$ の部分に3解

◀ 1つのXに対し、2つのxが対応 計6個。

$h(X)=a^2X^3-4aX^2+5X-1$ とおくと。
$y=h(X)$ が $X>0$ で X軸と3回交われば良い。

$$h'(X)=3a^2X^2-8aX+5$$
$$=(3aX-5)(aX-1)$$

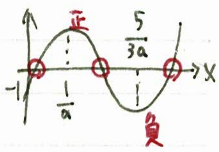
$h(X)=0$ の解は $X=\frac{1}{a}, \frac{5}{3a}$ の2つ
$a>0$ より $\frac{1}{a}<\frac{5}{3a}$

増減表は

X	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{5}{3a}$	$\cdots$
$h'(X)$		$+$		$-$		$+$
$h(X)$	-1	$\nearrow$	$h(\frac{1}{a})$	$\searrow$	$h(\frac{5}{3a})$	$\nearrow$

$$h\left(\tfrac{1}{a}\right)=a^2\times\frac{1}{a^3}-4a\times\frac{1}{a^2}+5\times\frac{1}{a}-1=\frac{2}{a}-1$$
$$h\left(\tfrac{5}{3a}\right)=a^2\times\frac{125}{27a^3}-4a\times\frac{25}{9a^2}+5\times\frac{5}{3a}-1=\frac{50}{27a}-1$$

$h(\frac{1}{a})>0$ かつ $h(\frac{5}{3a})<0$ となれば良い。



$\frac{2}{a}-1>0$ かつ $\frac{50}{27a}-1<0$

よって $\frac{50}{27}<a<2$ //

コメント

6次方程式には驚いてしまうが、
論を進めると、シンプルな解法に落ち着く
他の解法では、計算量が多くなりすぎる
などで、現実的ではないため。
恐らく、この解法が、東大の想定していたもの
だと思われる。

2021年 東大数学 文系第1問 ④

解法② 連立して、xを消去。yが6個解を持つ条件

C: $y=ax^3-2x$
D: $x^2+y^2=1$
から、xを消去する

式の形から、カンタンにはxを消せない
しかたなく次数を上げて処理。
Cを2乗して、偶数乗にする。

正直、あまりやりたくない解法。
ふつうなら、この時点で避けるでしょう。

Cを2乗して、

$y^2=x^2(ax^2-2)^2$

$y^2=(1-y^2)\{a(1-y^2)-2\}^2$　← $x^2=1-y^2$を代入

⋮ (整理して)　　yの降べきの順。

$a^2y^6+(-3a^2+4a)y^4+(3a^2-8a+5)y^2-a^2+4a-4=0$

解法①と同様に、$y^2=Y$とおき、Yの3次方程式へ。
$Y>0$に3解持てば、yが6個の解を持つ。

$y^2=Y$とおき、$Y>0$に3解を持つ条件を求める。

$I(Y)=a^2Y^3+(-3a^2+4a)Y^2+(3a^2-8a+5)Y-a^2+4a-4$

$I'(Y)=3a^2Y^2+2(-3a^2+4a)Y+3a^2-8a+5$

$=(aY-a+1)(3aY-3a+5)$　← なんと、頑張ると因数分解できる。

$I'(Y)=0$を解くと
$Y=\frac{a-1}{a},\ \frac{3a-5}{3a}$ で
$\frac{3a-5}{3a}<\frac{a-1}{a}$

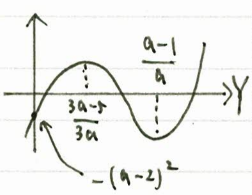
増減表は、

Y	0		$\frac{3a-5}{3a}$		$\frac{a-1}{a}$	
$I'(Y)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$I(Y)$	$I(0)$	↗	$I(\frac{3a-5}{3a})$	↘	$I(\frac{a-1}{a})$	↗

$I(0)=-a^2+4a-4=-(a-2)^2\leqq 0$　($a\neq 2$で負の値)

$I(\frac{3a-5}{3a})=\cdots$(激しい計算)$\cdots=\frac{27a-50}{27a}$

$I(\frac{a-1}{a})=\cdots$(激しい計算)$\cdots=\frac{a-2}{a}$



$I(\frac{3a-5}{3a})>0$ かつ $I(\frac{a-1}{a})<0$ を解くと、

$\frac{50}{27}<a<2$ //　(確かに、右上図のように3解を持つ)

解法①をただ計算を面倒にした非現実的な解法。

解法③ 連立するが、xもyも消去せずに、何とかならないか

C: $y=ax^3-2x$
D: $x^2+y^2=1$

の2式から、xもyも残して、方程式が解けないか、喰らいついてみる。
(■x+▲y+■)(○x+△y+□)$=0$
のような形が作れれば、筆が進むのだが、作れず、断念。

解法④ xの6次方程式が重解を持つ条件

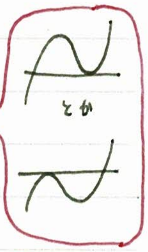
$a^2x^6-4ax^4+5x^2-1=0$ が重解を持つ条件を考察。
これは、偶関数(xの偶数乗しか登場しない)なので、
ある解αを持つとき$-\alpha$も解になる($\alpha\neq 0$)
よって、検討したい状態(CとDが接する)は、
$x>0$の部分だけで重解になる条件を考察すれば良く、$x^2=X$と置換した後の

$h(X)=a^2X^3-4aX^2+5X-1$ について、
$h(X)=0$ が Xの重解を持てば良い。

1枚目にも書いたが、接する条件は、6個の解を持つ条件を直接求めているわけではなく、CとDが接する場合から間接的に求めている。
その為、記述によって「説得」をしておきました。

解法④-1

$h(X)=0$が $X>0$に重解を持つとき
$y=h(X)$の極大値や極小値が0になる。



よって、$h(\frac{1}{a})=0$ や $h(\frac{5}{3a})=0$ を解き
$a=2,\ \frac{50}{27}$

ほとんど解法①と同じ(というか、解法①をややこしくしただけ)
なので、解法の1つとカウントしません。

解法④-2 解と係数の関係を利用

$h(X)=0$が、重解を持つので、
$h(X)=0$の3解を、α,α,βとおく。
$h(X)=a^2X^3-4aX^2+5X-1=0$ で、解と係数の関係から、

2021年　東大数学　文系第1問 ⑤

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+\beta = \dfrac{4a}{a^2} & \cdots(\mathrm{i}) \\ \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta = \dfrac{5}{a^2} & \cdots(\mathrm{ii}) \\ \alpha\cdot\alpha\cdot\beta = \dfrac{1}{a^2} & \cdots(\mathrm{iii}) \end{cases}$$

α, β, a の3文字に対して、3本の等式なので、連立方程式を解くだけ。

(i)より $2\alpha+\beta = \dfrac{4}{a}$　$\therefore \dfrac{1}{a} = \dfrac{2\alpha+\beta}{4}$ …(iv)

(iii)に代入して　$\alpha^2\beta = \left(\dfrac{2\alpha+\beta}{4}\right)^2$　aを消去

$16\alpha^2\beta = 4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$ …(v)

(iii)を(ii)に代入して

$\alpha^2+2\alpha\beta = 5\times\alpha^2\beta$　$\therefore \alpha^2\beta = \dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta}{5}$

(v)に代入して

$16\cdot\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta}{5} = 4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$

(整理して)　$4\alpha^2-12\alpha\beta+5\beta^2=0$

$(2\alpha-\beta)(2\alpha-5\beta)=0$

$\therefore \beta = 2\alpha,\ \dfrac{2}{5}\alpha$

要するに連立方程式を解いている。

(A) $\beta=2\alpha$ のとき

(i) … $4\alpha = \dfrac{4}{a}$　$\therefore \alpha = \dfrac{1}{a}$

(ii) … $\alpha^2+4\alpha^2 = \dfrac{5}{a^2}$　$\therefore \alpha^2 = \dfrac{1}{a^2}$ ((i)と同じ)

(iii) … $2\alpha^3 = \dfrac{1}{a^2}$

$= \alpha^2$　(i)から得られた $\alpha=\dfrac{1}{a}$ を代入

$\therefore \alpha = \dfrac{1}{2}$　(αは $h(x)=0$ の正の解なので $\alpha\neq0$)

$\beta=2\alpha=1$

$a=\dfrac{1}{\alpha}=2$　　よって $\underline{a=2}$

(B) $\beta=\dfrac{2}{5}\alpha$ のとき

(i) … $2\alpha+\dfrac{2}{5}\alpha = \dfrac{4}{a}$　$\therefore \dfrac{3}{5}\alpha = \dfrac{1}{a}$

(ii) … $\alpha^2+\dfrac{4}{5}\alpha^2 = \dfrac{5}{a^2}$　$\therefore \dfrac{9}{5}\alpha^2 = \dfrac{5}{a^2}$

(iii) … $\alpha^2\times\dfrac{2}{5}\alpha = \dfrac{1}{a^2}$　$\therefore \dfrac{2}{5}\alpha^3 = \dfrac{1}{a^2}$

代入

$\dfrac{2}{5}\alpha^3 = \left(\dfrac{3}{5}\alpha\right)^2$

$\alpha = \dfrac{5}{2}\times\dfrac{3^2}{5^2} = \dfrac{9}{10}$　　$\beta = \dfrac{2}{5}\alpha = \dfrac{9}{25}$　　$\underline{a = \dfrac{5}{3\alpha} = \dfrac{50}{27}}$

以上、接する場合の a は $a=2,\ \dfrac{50}{27}$ なので、

$$\underline{\dfrac{50}{27} < a < 2}\ /\!/$$

解法⑤　④と同じように重解条件(x消去し、y残し)

CとDから、xを消去すると、

$a^2y^6 + (-3a^2+4a)y^4 + (3a^2-8a+5)y^2 - a^2+4a-4 = 0$

④と同じ理由で、$y^2=Y$ とおくと、

$I(Y) = a^2Y^3 + (-3a^2+4a)Y^2 + (3a^2-8a+5)Y - a^2+4a-4 = 0$

解を α, α, β とおき、解と係数の関係から、

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+\beta = \dfrac{1}{a^2}(3a^2-4a) \\ \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta = \dfrac{1}{a^2}(3a^2-8a+5) \\ \alpha^2\beta = \dfrac{1}{a^2}(a^2-4a+4) \end{cases}$$

この、αとβとaの3元連立方程式は計算が苛烈で解けませんでした。

解ければ答えが出るのはわかっていますが、断念します。

ちなみに、解法②で示したのを利用し、

$y=I(Y)$ の極値が0になるとしても解けます

極値は　$I\left(\dfrac{a-1}{a}\right) = \dfrac{a-2}{a} = 0$　$\therefore a=2$

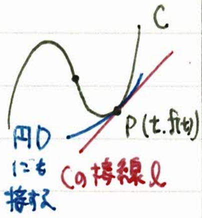
$I\left(\dfrac{3a-5}{3a}\right) = \dfrac{27a-50}{27a}$　$\therefore a=\dfrac{50}{27}$

2021年　東大 数学　文系第1問 ⑥

解法⑥～⑲は、似ている解法が多く登場するため、横に比較しながらご覧下さい。

Cの上にP(t, f(t))をおいて処理

解法⑥⑦ ℓが円Dに接する。



点P(t, f(t))が円D上にあるので、$x^2+y^2=1$ に代入し、

$t^2+\{f(t)\}^2=1$

$t^2+(at^3-2t)^2=1$

∴ $a^2t^6-4at^4+5t^2-1=0$ …(＊)

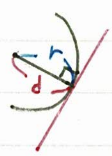
また、接線ℓ：$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$y=(3at^2-2)(x-t)+at^3-2t$

$y=(3at^2-2)x-2at^3$

が円Cに接する。

解法⑥ 点と直線の距離の公式を利用。d=r



ℓと円Dの中心との距離dが円Dの半径と一致すればよい。

$$d=\frac{|0+0-2at^3|}{\sqrt{(3at^2-2)^2+(-1)^2}}=1$$

2乗して分母を払う

$(-2at^3)^2=(3at^2-2)^2+1$

$4a^2t^6-9a^2t^4+12at^2-5=0$ …Ⓐ

解法⑦ 連立して(判別式)=0

ℓと円Dを連立して、

$x^2+\{(3at^2-2)x-2at^3\}^2=1$

$\{1+(3at^2-2)^2\}x^2-4at^3(3at^2-2)x+4a^2t^6-1=0$

接するとき、(判別式)=0 なので、

(判別式)/4 $=\{-2at^3(3at^2-2)\}^2-\{1+(3at^2-2)^2\}(4a^2t^6-1)=0$

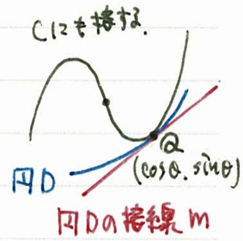
⋮（頑張る）

$=4a^2t^6-9a^2t^4+12at^2-5=0$ …Ⓐ

(＊)かつⒶを解けばよいのだが、これも計算が激烈すぎて、断念しました。

円D上に点Q(cosθ, sinθ)をおいて処理

解法⑧⑨ mがCに接する



点Q(cosθ, sinθ)がC：y=f(t)上にあるので、y=f(x)に代入し、

$\sin\theta=a\cos^3\theta-2\cos\theta$ …(＊＊)

また、接線m：$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$

が、C：$y=f(x)=ax^3-2x$ に接する。連立して

$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{1}{\sin\theta}=ax^3-2x$$

$a\sin\theta\cdot x^3+(\cos\theta-2\sin\theta)x-1=0$

これが重解を持つ。

解法⑧ 極値=0を利用。

$J(x)=a\sin\theta\cdot x^3+(\cos\theta-2\sin\theta)x-1$ とおき、

J(x)の極値=0となればよい、として、

$J'(x)=0$ の解、αとβを用い、$J(\alpha)=0$, $J(\beta)=0$ を解こうとするも、計算が激しく断念。

解法⑨ 解と係数の関係を利用

$J(x)=0$ の解を、α, α, βとおくと、

$$\begin{cases}\alpha+\alpha+\beta=0\\ \alpha^2+2\alpha\beta=\dfrac{\cos\theta-2\sin\theta}{a\sin\theta}\\ \alpha^2\beta=\dfrac{1}{a\sin\theta}\end{cases}$$

この3式から、βとθを消し、aとαを残すと、

$4a^2\alpha^6-9a^2\alpha^4+12a\alpha^2-5=0$

となり、Ⓐのtをαに変えた式が得られる。

解法⑧⑨と同様に、これも断念

Date

2021年　東大数学　文系第1問⑦

解法⑩　ℓが、円Dの接線と一致する

ℓ: $y = f'(t)(x-t) + f(t)$

$(3at^2-2)x - y - 2at^3 = 0$

が、点P$(t, f(t))$ においての 円Dの接線

$t\cdot x + f(t)y = 1$

$tx + (at^3-2t)y - 1 = 0$ と一致する。

$$\begin{cases} (3at^2-2)x - y - 2at^3 = 0 \\ t\,x + (at^3-2t)y - 1 = 0 \quad \times(2at^3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3at^2-2)x - y - 2at^3 = 0 \\ 2at^4 x + (2at^3)(at^3-2t)y - 2at^3 = 0 \end{cases}$$

よって、

$3at^2 - 2 = 2at^4$ …(i)

$-1 = 2at^3(at^3-2t)$ …(ii)

また、(*) $\Leftrightarrow$ $a^2t^6 - 4at^4 + 5t^2 - 1 = 0$ …(iii) も利用できる

(i)(ii)(iii) の3式から、aとtを求める。

(tの次数を下げ) $t^2 = \dfrac{1}{6a-10}$ を代入し、

$27a^2 - 104a + 100 = 0$

$(a-2)(27a-50) = 0$　∴ $a = 2, \dfrac{50}{27}$

コメント

解法⑩も⑪も、接線一致の議論だが、どちらも、aの値が出た。

計算は面倒。

解法⑪　mが、Cの接線と一致する

m: $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1$

が、点Q$(\cos\theta, \sin\theta)$ においての Cの接線。

$y - f(\cos\theta) = f'(\cos\theta)(x - \cos\theta)$

$(3a\cos^2\theta - 2)x - y - 2a\cos^3\theta = 0$ と一致する。

$$\begin{cases} (\cos\theta)x + (\sin\theta)y - 1 = 0 \\ (3a\cos^2\theta-2)x - y - 2a\cos^3\theta = 0 \quad \times(-\sin\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\cos\theta)x + (\sin\theta)y - 1 = 0 \\ -\sin\theta(3a\cos^2\theta-2)x + (\sin\theta)y + 2a\cos^3\theta\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$\cos\theta = -\sin\theta(3a\cos^2\theta - 2)$ …(i)

$-1 = 2a\cos^3\theta\sin\theta$ …(ii)

また、(**) $\Leftrightarrow$ $\sin\theta = a\cos^3\theta - 2\cos\theta$ …(iii) も利用できる。

(i)(ii)(iii) の3式から、aとθを求める。

(iii) $\Leftrightarrow$ $a\cos^3\theta = \sin\theta + 2\cos\theta$ を(ii)に代入し

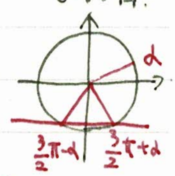
$-1 = 2\sin\theta(\sin\theta + 2\cos\theta)$

$2\sin2\theta - \cos2\theta = -2$

$\sqrt5\sin(2\theta-\alpha) = -2$　但し、$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt5}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt5}$ となる角。

$-\alpha \leqq 2\theta - \alpha \leqq 4\pi - \alpha$ で、

$\sin(2\theta-\alpha) = -\frac{2}{\sqrt5}$ となる解探すと、



$2\theta - \alpha = \frac32\pi - \alpha, \frac32\pi + \alpha, \frac72\pi - \alpha, \frac72\pi + \alpha$

$\theta = \frac34\pi, \frac34\pi + \alpha, \frac74\pi, \frac74\pi + \alpha$

このうち、(i)〜(iii)を満たすのは $\theta = \frac34\pi, \frac74\pi + \alpha$ の2つ

$\theta = \frac34\pi$ のとき、$a = 2$,

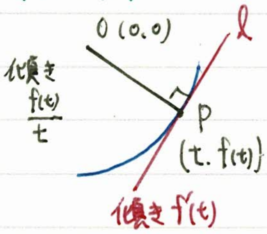
$\theta = \frac74\pi + \alpha$ のとき、$a = \frac{50}{27}$　$\left(\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

よって、$a = 2, \dfrac{50}{27}$

Date

2021年 東大数学. 文系第1問 ⑧

解法⑫ (傾き)×(傾き)=−1 の直交条件



OP⊥l なので

$\frac{f(t)}{t}\times f'(t)=-1$ ・・・☆

$\frac{at^3-2t}{t}\times(3at^2-2)=-1$

$3a^2t^4-8at^2+5=0$

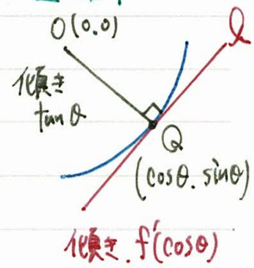
$(3at^2-5)(at^2-1)=0$ ∴ $t^2=\frac{1}{a},\frac{5}{3a}$ ・・・Ⓑ

(*) $a^2t^6-4at^4+5t^2-1=0$ も成立するので代入すると.

(i) $t^2=\frac{1}{a}$ のとき. $a=2$.

(ii) $t^2=\frac{5}{3a}$ のとき. $a=\frac{50}{27}$ ∴ $a=2,\frac{50}{27}$

解法⑬ (傾き)×(傾き)=−1 の直交条件



OQ⊥l なので

$\tan\theta\times f'(\cos\theta)=-1$

$\tan\theta\cdot(3a\cos^2\theta-2)=-1$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(3a\cos^2\theta-2)=-1$ ・・・☆☆

また.(**) $\sin\theta=a\cos^3\theta-2\cos\theta$ も成立するので代入すると.

$\frac{a\cos^3\theta-2\cos\theta}{\cos\theta}(3a\cos^2\theta-2)=-1$ ・・・☆☆☆ Ⓑと同じ

$\therefore\cdots$ $(a\cos^2\theta-1)(3a\cos^2\theta-5)=0$ $a\cos^2\theta=1,\frac{5}{3}$

(i) $a\cos^2\theta=1$ を☆☆に代入して. $\tan\theta=1$ ∴ $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$ $a=2$.

(ii) $a\cos^2\theta=\frac{5}{3}$ を☆☆に代入して. $\tan\theta=-\frac{1}{3}$ ∴ $\cos^2\theta=\frac{9}{10}$ $a=\frac{50}{27}$

解法⑭ 内積=0 で直交条件

$\overrightarrow{OP}=(t,f(t))$ と. l の方向ベクトル $(1,f'(t))$ が直交する.

$(t,f(t))\cdot(1,f'(t))=0$

$t+f(t)\cdot f'(t)=0$ ・・・☆と同じ (以下⑫と同じ)

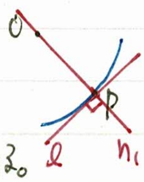
解法⑮ 内積=0 で直交条件

$\overrightarrow{OQ}=(\cos\theta,\sin\theta)$ と. l の方向ベクトル $(1,f'(\cos\theta))$ が直交する.

$(\cos\theta,\sin\theta)\cdot(1,3a\cos^2\theta-2)=0$

$\cos\theta+\sin\theta(3a\cos^2\theta-2)=0$ ・・・☆☆と同じ. (以下⑬と同じ)

解法⑯ 法線が原点を通る



法線 n_1 : $y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$ が原点を通る。

$0=-\frac{1}{f'(t)}(0-t)+f(t)$

∴ $\frac{t}{f'(t)}+f(t)=0$ ・・・☆と同じ. (以下⑫と同じ)

解法⑰ 法線が原点を通る

法線 n_2 : $y=-\frac{1}{f'(\cos\theta)}(x-\cos\theta)+f(\cos\theta)$ が原点を通る。

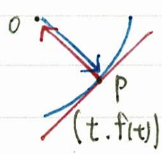
$0=-\frac{-\cos\theta}{f'(\cos\theta)}+f(\cos\theta)$

$\frac{a\cos^3\theta-2\cos\theta}{\cos\theta}(3a\cos^2\theta-2)=-1$ と変形できる

☆☆☆と同じ式

以下. ⑬と同じ.

解法⑱ ベクトルの平行条件



l: $f'(t)x-y-tf'(t)+f(t)=0$ の法線ベクトル

$(f'(t),-1)$ が.

$\overrightarrow{OP}=(t,f(t))$ と平行 なので

$(f'(t),-1)=k(t,f(t))$ となる実数kが存在

$\begin{cases} f'(t)=kt \\ -1=kf(t) \end{cases}$ kを消去すると. $\frac{f'(t)}{t}=\frac{-1}{f(t)}$ ・・・☆と同じ (以下⑬と同じ)

解法⑲ ベクトルの平行条件

l: $f'(\cos\theta)x-y-tf'(\cos\theta)+f(\cos\theta)=0$ の法線ベクトル

$(f'(\cos\theta),-1)$ が. $\overrightarrow{OQ}=(\cos\theta,\sin\theta)$ と平行 なので

$(f'(\cos\theta),-1)=k(\cos\theta,\sin\theta)$

$\begin{cases} f'(\cos\theta)=k\cos\theta \\ -1=k\sin\theta \end{cases}$ kを消去すると. $\frac{f'(\cos\theta)}{\cos\theta}=\frac{-1}{\sin\theta}$

☆☆と同じ (以下⑬と同じ)

2021年　東大数学　文系第1問.　よく見かけた誤答

$y = f(x) = x^3 - ax$ とし　極値を求める.

$y' = f'(x) = 3x^2 - a$ より
$f'(x) = 0$ となる x は　$x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$
$\alpha = -\sqrt{\frac{a}{3}}$　$\beta = \sqrt{\frac{a}{3}}$ とし.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

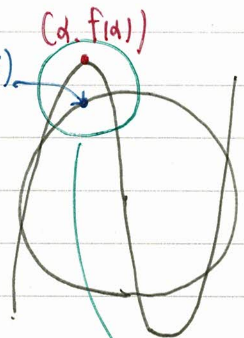
これが増減。

$x^2 + y^2 = 1$ に
$x = \alpha$ を代入すると
$y = \pm\sqrt{1-\alpha^2}$

右図より

$f(\alpha) > \sqrt{1-\alpha^2}$
となればよい。

対称性から.
$f(\beta) < -\sqrt{1-\beta^2}$
となり. 6個の共有点を持つ.



極値が円から
ハミ出ていれば.
6コの共有点を
持つだろうという
考え。

この部分が間違い。

極値が円からハミ出るかどうか. ではなく
円と3次関数が接するか. どうか　で
場合をわける.